

SUPPORT DE COURS

Intitulé : Equations aux Dérivées Partielles

Contenu : Transformée de Fourier, Transformées de Laplace,
Equations aux dérivées partielles

Filières : Ingénieurs et Sciences de l'Ingénieur III

Ecole Nationale Supérieure Polytechnique de Douala

Semestre 5

Nombre de crédit : 2

Année Académique 2025/2026

Table des matières

Introduction	1
1 TRANSFORMEE DE FOURIER ET DE LAPLACE	2
1.1 TRANSFORMEE DE FOURIER	2
1.1.1 Définitions et exemples	2
1.1.2 Propriétés de la transformation de Fourier	4
1.1.3 Produit de convolution	5
1.1.4 Transformée de Fourier et produit de convolution	6
1.1.5 Transformée de Fourier inverse	6
1.1.6 TD sur la transformée de Fourier	7
1.2 TRANSFORMEE DE LAPLACE	10
1.2.1 Définitions	10
1.2.2 Propriétés	11
1.2.3 Transformée de Laplace des fonctions usuelles	13
1.2.4 Transformée de Laplace inverse	13
1.2.5 Transformée de Laplace d'une dérivée	14
1.2.6 Transformée de Laplace d'une primitive	15
1.2.7 Transformée de Laplace et produit de convolution	15
1.2.8 Relation entre la transformée de Laplace et transformée de Fourier	15
1.3 APPLICATIONS DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE	16
1.3.1 Résolution des équations différentielles linéaires	16
1.3.2 Résolution des systèmes différentiels linéaires	16
1.3.3 Equations intégrales	17
2 GENERALITES SUR LES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES	18
2.1 Introduction	18

2.2	Définitions et exemples	19
2.3	Notion de problème bien posé	21
2.4	Classification des E.D.P	22
2.4.1	Equations aux dérivées partielles linéaires	22
2.4.2	E.D.P quasi-linéaires et semi-linéaire	23
2.4.3	Principe de superposition	24
2.4.4	Quelques E.D.P classiques	25
3	ETUDE DES E.D.P DU PREMIER ORDRE	27
3.1	Méthode des caractéristiques	27
3.2	Utilisation d'un changement de variables	29
3.2.1	Changement de variables affines	29
3.2.2	Changement en coordonnées polaires	30
3.2.3	TD sur les E.D.P d'ordre 1	30
4	ETUDE DES E.D.P LINEAIRES DU SECOND ORDRE	31
4.1	E.D.P hyperboliques, paraboliques, élliptiques : cas $n = 2$	31
4.2	Réduction d'une E.D.P d'ordre 2 en dimension 2 à sa forme canonique	33
4.3	Méthode de séparation des variables	34
4.3.1	Cas de l'équation de la chaleur en dimension $1 + 1$	34
4.3.2	Cas de l'équation des ondes en dimension $1 + 1$	34
4.4	TD sur les E.D.P d'ordre 2	35

INTRODUCTION

Ce document est un support de cours. Ce n'est pas un livre de cours. Tout étudiant en sa possession doit obligatoirement suivre le cours fait par l'enseignant. Le support facilite simplement la compréhension du cours qu'expose l'enseignant et ne peut **jamais** remplacer les explications de ce dernier. Comme tout document, il est muet. Certaines évidences qui sont à l'intérieur peuvent être des difficultés pour les étudiants. Ce document est destiné aux étudiants du niveau 3, cycle Ingénieur. Il est cependant utile pour les étudiants de la filière Mathématique ainsi qu'à toute personne s'intéressant aux transformées intégrales et équations aux dérivées partielles (E.D.P).

OBJECTIFS :

Familiariser les étudiants aux notions de transformées de Fourier et de Laplace ainsi qu'aux Equations aux Dérivées Partielles (E.D.P). Leur montrer l'importance des E.D.P, les différentes types d'E.D.P et leur donner quelques méthodes de résolution de certaines classes d'E.D.P.

TRANSFORMEE DE FOURIER ET DE LAPLACE

Il a été étudié au niveau 2, la représentation en série de Fourier d'une fonction périodique i.e en une superposition de fonctions sinusoidales. Il est cependant souhaitable d'obtenir de t'elle représentation pour des fonctions définies sur un intervalle infini et n'ayant aucune périodicité particulière. une telle représentation est appelée transformée de Fourier, et appartient à une classe de représentation appelée transformées intégrales et dans laquelle on compte aussi la transformée de Laplace et la transformée en Z .

La transformée de Fourier peut donc être considérée comme une généralisation de la représentation en série de Fourier des fonctions périodiques. La seule condition que devra remplir une fonction f pour admettre une transformée de Fourier est que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$.

Dans ce chapitre, nous étudions dans un premier temps **La transformée de Fourier** et dans un second temps **la transformée de Laplace**.

1.1 TRANSFORMEE DE FOURIER

1.1.1 Définitions et exemples

Définition 1.1. On désigne par $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions f définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues presque partout et telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt < +\infty :$$

$\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ est souvent appelé *espace des signaux stables*.

Exemple 1.1.

1. Les fonctions $f : t \longrightarrow e^{-|t|}$ et $g : t \longrightarrow \frac{1}{1+t^2}$ sont des éléments de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.
2. La fonction $h : t \longrightarrow e^{-t}$ n'appartient pas à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Proposition 1.1. Si $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors on a :

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0.$$

Définition 1.2. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

On appelle transformée de Fourier de f , la fonction notée $\mathcal{F}(f)$ ou encore $\hat{f}$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$\mathcal{F}(f)(s) = \hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi st} f(t) dt.$$

Remarque 1.1.

1. L'application $\mathcal{F} : f \longrightarrow \mathcal{F}(f)$ est appelée transformation de Fourier.
2. $\forall s \in \mathbb{R}, |e^{-2i\pi st} f(t)| = |f(t)|$, donc la fonction $\mathcal{F}(f)$ est définie et bornée sur $\mathbb{R}$.
On admettra que $\mathcal{F}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
3. La courbe d'équation $y(s) = |\mathcal{F}(f)(s)|$ est appelée spectre de f .
On démontre que $\lim_{|s| \rightarrow +\infty} |\mathcal{F}(f)(s)| = 0$.

Propriété 1.1.

1. Si f est paire, alors

$$\mathcal{F}(f)(s) = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos(2\pi st) dt.$$

.

2. Si f est impaire, alors

$$\mathcal{F}(f)(s) = -2i \int_0^{+\infty} f(t) \sin(2\pi st) dt.$$

.

Exemple 1.2. 1. Signal "porte"

La fonction porte est la fonction notée Π définie par :

$$\begin{cases} \Pi(t) = 1 & \text{si } t \in [-a, a] \\ \Pi(t) = 0 & \text{si non} \end{cases}, \quad a > 0$$

On a

$$\mathcal{F}(\Pi) : s \longmapsto \begin{cases} \frac{\sin(2\pi as)}{\pi s} & \text{si } s \neq 0 \\ 2a & \text{si non} \end{cases}$$

$\mathcal{F}(\Pi)$ est prolongeable par continuité en 0.

La fonction $\mathcal{F}(\Pi)$ est appelée "sinus cardinal".

2. Soit $a > 0$. Déterminer la transformée de Fourier de la fonction $f : t \longmapsto e^{-a|t|}$.

1.1.2 Propriétés de la transformation de Fourier

Linéarité

Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et λ, μ deux nombres complexes. Alors

$$\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \mathcal{F}(\lambda f) + \mathcal{F}(\mu g).$$

On dit que $\mathcal{F}$ est une transformation linéaire.

Règle de multiplication par t

Soit la $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Si la fonction $h : t \mapsto tf(t)$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors :

$$\frac{d}{ds}\mathcal{F}(f) : s \mapsto -2i\pi\mathcal{F}(h)(s)$$

Autrement dit

$$\mathcal{F}(h) : s \mapsto \frac{i}{2\pi} \frac{d}{ds}\mathcal{F}(f)(s).$$

Transformée d'une dérivée

Si f est dérivable, appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et si $\frac{df}{dt}$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ alors on a :

$$\mathcal{F}\left(\frac{df}{dt}\right) : s \mapsto 2i\pi s\mathcal{F}(f)(s)$$

Cette propriété peut-être prolongée aux dérivées d'ordre supérieur :

$$\mathcal{F}(f'')(s) = 2i\pi s\mathcal{F}(f')(s) = -4\pi^2 s^2 \mathcal{F}(f)(s),$$

et en générale on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{F}(f^{(n)})(s) = (2i\pi s)^n \mathcal{F}(f)(s).$$

Image d'une translatée (formule du retard si $a > 0$)

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \tau_a f(t) = f(t - a),$$

$\tau_a f$ est la translatée de f ou le signal f "retardé" de a (si $a > 0$). On a :

$$\mathcal{F}(\tau_a f) : s \mapsto e^{-2i\pi as} \mathcal{F}(f)(s).$$

Multiplication exponentielle

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Si la fonction $g : t \mapsto e^{2i\pi\alpha t} f(t)$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors :

$$\mathcal{F}(g) : s \mapsto \mathcal{F}(f)\left(s + \frac{i\alpha}{2\pi}\right)$$

Changement d'échelle

Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$. Si la fonction $u : t \mapsto f(\omega t)$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors :

$$\mathcal{F}(u) : s \mapsto \frac{1}{|\omega|} \mathcal{F}(f)\left(\frac{s}{\omega}\right).$$

Conjugaison

$$\forall f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}), \quad \mathcal{F}(\bar{f})(s) = \overline{\mathcal{F}(f)}(-s).$$

1.1.3 Produit de convolution

Définition 1.3. Soient f et g deux fonctions numériques de la variable réelle.

On appelle produit de convolution, la fonction notée $f * g$ définie (sous réserve d'existence) par :

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)dx.$$

La fonction $f * g$ est appelée **convoluée** des fonctions f et g .

Proposition 1.2. (Propriétés du produit de convolution)

1. Si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors $f * g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. En d'autres termes, si f et g sont deux signaux stables alors $f * g$ est un signal stable.
2. Le produit de convolution est une opération commutative, c'est-à-dire $f * g = g * f$.
3. Le produit de convolution est une opération associative, c'est-à-dire $f * (g * h) = (f * g) * h$.
4. Le produit de convolution est une opération distributive par rapport à l'addition, c'est-à-dire $f * (g + h) = f * g + f * h$.
5. Si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et si f (ou g) est dérivable, alors $f * g$ est dérivable et $(f * g)' = f' * g = f * g'$.

1.1.4 Transformée de Fourier et produit de convolution

Théorème 1.1. (*Théorème de convolution*)

Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors on a :

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \times \mathcal{F}(g)$$

De plus si $fg \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors

$$\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g).$$

Théorème 1.2. (*Formule de Parseval*)

Soit $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(s)\overline{\mathcal{F}(g)(s)}ds.$$

En particulier, si $f = g$, alors on a la formule :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(f)(s)|^2 ds.$$

1.1.5 Transformée de Fourier inverse

Définition 1.4. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

On appelle transformée de Fourier inverse ou (conjuguée) de f , la fonction définie par

$$\overline{\mathcal{F}}(f)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi st} f(t) dt.$$

On admet le théorème suivant :

Théorème 1.3. (*Formule d'inversion*)

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors on a :

$$\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f))(t) = \frac{1}{2} [f(t^+) + f(t^-)].$$

où $f(t^+)$ et $f(t^-)$ représentent les limites à gauche et à droite en t de f respectivement.

Si f est continue en t , alors on a :

$$\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f))(t) = f(t)$$

Ainsi on peut écrire :

$$\mathcal{F}(f)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi st} f(t) dt \iff f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi st} \mathcal{F}(f)(s) ds.$$

Autres définitions de la transformée de Fourier

Il peut être intéressant dans certains cas d'obtenir le spectre de f en fonction d'une pulsation plutôt que d'une fréquence. Dans ce cas la transformée de Fourier de $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ par :

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$$

et la transformée de Fourier inverse s'écrit alors :

$$\overline{\mathcal{F}}(f)(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega s} f(\omega) d\omega$$

On peut aussi adopter une formulation plus symétrique :

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$$

et

$$\overline{\mathcal{F}}(f)(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega s} f(\omega) d\omega.$$

1.1.6 TD sur la transformée de Fourier

Exercice 1.1. Soit $a > 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{-at^2}$.

1. Montrer que $\mathcal{F}(f)(s) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2 s^2}{a}}$. (On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$)

2. On définit pour tout $\sigma > 0$, $f_\sigma(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$.

a) Déterminer la transformée de Fourier de f_σ .

b) Montrer que $f_{\sigma_1} * f_{\sigma_2} = f_{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$.

Exercice 1.2. 1. Soit $a > 0$. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{a^2 + t^2}$. (On pourra utiliser la transformée de Fourier inverse de la fonction $t \mapsto e^{-a|t|}$).

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. On considère l'équation intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{g(t)}{(x-t)^2 + a^2} dt = \frac{1}{x^2 + b^2}.$$

a) Écrire cette équation sous forme d'une équation de convolution.

b) Déterminer $\mathcal{F}(g)$ et en déduire g .

Exercice 1.3. On cherche une fonction f intégrable et solution de l'équation différentielle

$$-y'' + y = e^{-2|x|}$$

1. Montrer que si f vérifie cette équation alors

$$\mathcal{F}(f)(s) = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{1 + 4\pi^2 s^2} - \frac{1}{4 + 4\pi^2 s^2} \right)$$

2. En déduire f .

Exercice 1.4. 1. En utilisant la transformée de Fourier de la fonction $f : t \mapsto e^{-|t|}$, montrer que pour tout réel x , $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt = \pi e^{-|x|}$.

2. Trouver la transformée de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$

3. Déterminer la convolution de f par elle-même et en déduire sans une autre intégration sa transformée de Fourier.

4. Déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 w}{w^2} dw = \pi$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 w}{w^4} dw = \frac{2\pi}{3}$.

Exercice 1.5. Soit $f : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq a \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$, $a > 0$.

1. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(at) \cos(xt)}{t} dt = \begin{cases} \pi & \text{si } |x| < a \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } |x| = a \\ 0 & \text{si } |x| > a \end{cases}$.

2. En déduire la valeur de chacune des intégrales : $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(3t)}{t} dt$, $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(3t) \cos(2t)}{t} dt$

Exercice 1.6. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$

1. Déterminer la transformée de Fourier de f .

2. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$

Exercice 1.7. (Équation de la chaleur)

On considère l'équation de la chaleur en une dimension pour une fonction $u(x, t)$ où $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2}(x, t) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

Cette équation modélise l'évolution de la chaleur sur un fil de longueur infinie. La quantité $u(x, t)$ représente la température du fil à l'abscisse x et au temps t .

1. On considère que pour tout temps t , la fonction $x \mapsto u(x, t)$ est intégrable et on pose $\hat{u}(x, t)$ sa transformée de Fourier. Montrer que $\hat{u}$ vérifie l'équation :

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(s, t) + 4\pi^2 s^2 \hat{u}(s, t) = 0$$

2. En déduire que $\hat{u}(s, t) = \hat{u}_0(s)e^{-4\pi^2 s^2 t}$

3. On pose $g(s, t) = e^{-4\pi^2 s^2 t}$. Montrer que :

$$u(x, t) = u_0(x) * \hat{g}(x, t)$$

4. En déduire que $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4t}} u_0(x - y) dy$.

1.2 TRANSFORMÉE DE LAPLACE

1.2.1 Définitions

Définition 1.5. (*Fonction causale et fonction de Heaviside*)

1. Une fonction f , définie sur $\mathbb{R}$ est dite **causale** si : Pour tout $t < 0$, $f(t) = 0$.
2. On appelle fonction **échelon unité** ou **fonction de Heaviside**, la fonction notée Y ou $\mathcal{U}$ définie par :
$$\begin{cases} Y(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ Y(t) = 1 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

Remarque 1.2. Pour transformer une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ en une fonction causale f prenant les mêmes valeurs sur $[0, +\infty[$, on la multiplie par la fonction échelon unité : C'est-à-dire $f(t) = Y(t)g(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Définition 1.6. (*Transformée de Laplace*)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle.

On appelle **transformée de Laplace** de la fonction f , notée $\mathcal{L}(f)$, la fonction définie par :

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (1.1)$$

pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, quand l'intégrale du second membre est absolument convergente, c'est à dire quand l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} |f(t)| dt$ converge.

Remarque 1.3. 1. On dit qu'une fonction f est à croissance au plus exponentielle, d'ordre inférieur ou égal à $\alpha \in \mathbb{R}$, s'il existe une constante $C > 0$ (dépendant de f) telles que $|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}$, pour tout $t > t_0$ (à noter que α peut être négatif).

2. La transformation de Laplace ne fait intervenir que les valeurs $f(t)$ de la fonction pour $t > t_0$. Les fonctions f et Yf (où Y est la fonction de Heaviside) ont, par définition, mêmes transformées de Laplace.

De même, deux fonctions f et g qui sont égales sur $\mathbb{R}_+$ ont même transformée de Laplace.

Théorème 1.4.

Soit f une fonction continue par morceaux et soit $a \in \mathbb{R}$ tel que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at} |f(t)| dt$ converge. Alors :

1. Pour tout $x \geq a$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} |f(t)| dt$ converge
2. Il existe un nombre $p_0 \in [-\infty, a]$ (appelé abscisse de convergence de la transformée de Laplace de la fonction f) tel que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} |f(t)| dt$ converge pour $x > p_0$ et diverge pour $x < p_0$;

3. La transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)$ de la fonction f existe dans le demi-plan

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > p_0\}$$

Exemple 1.3. 1. Pour la fonction $f : t \mapsto e^{-t^2}$, l'abscisse de convergence est $p_0 = -\infty$ et la transformée de Laplace de f existe pour tout $z \in \mathbb{C}$;

2. Pour la fonction $f : t \mapsto e^{t^2}$, l'abscisse de convergence est $p_0 = +\infty$. La fonction f n'admet pas de transformée de Laplace ;

3. Pour une fonction bornée, ou bien pour une fonction de $\mathcal{L}^1$, l'abscisse de convergence est négative ou nulle.

4. Pour une fonction à croissance au plus exponentielle d'ordre α en $+\infty$, l'abscisse de convergence est inférieure ou égale à α .

Remarque 1.4. Dans le langage du calcul opérationnel, la fonction f à laquelle on applique la transformation de Laplace s'appelle l'original et sa transformée de Laplace $F = \mathcal{L}(f)$ s'appelle l'image ou le signal.

1.2.2 Propriétés

Linéarité

Soit f_1 (respectivement f_2) une fonction dont la transformée de Laplace $\mathcal{L}(f_1)$ (respectivement $\mathcal{L}(f_2)$) admet pour abscisse de convergence a_1 (respectivement a_2). Alors, pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ admet une transformée de Laplace d'abscisse de convergence $a \leq \max\{a_1, a_2\}$ et

$$\mathcal{L}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(p) = \lambda_1 \mathcal{L}(f_1)(p) + \lambda_2 \mathcal{L}(f_2)(p).$$

Changement d'échelle

Soit f une fonction dont la transformée de Laplace admet pour abscisse de convergence le nombre a . Alors, pour tout $\alpha > 0$, la fonction $f_\alpha : t \mapsto f(\alpha t)$ admet une transformée de Laplace d'abscisse de convergence le nombre λa et

$$\mathcal{L}(f_\alpha)(p) = \frac{1}{\alpha} \mathcal{L}(f)\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Modulation

Soit f une fonction dont la transformée de Laplace admet pour abscisse de convergence le nombre a . Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, la fonction $g_\alpha : t \mapsto e^{\alpha t} f(t)$ admet une transformée de Laplace d'abscisse de convergence $a + \mathcal{R}_e(\alpha)$ et

$$\mathcal{L}(g_\alpha)(p) = \mathcal{L}(f)(p - \alpha).$$

Translation

Soit f une fonction dont la transformée de Laplace admet pour abscisse de convergence le nombre a . Pour tout $b > 0$, la fonction $h_b : t \mapsto Y(t - b)f(t - b)$ admet une transformée de Laplace d'abscisse de convergence a et on a :

$$\mathcal{L}(h_b)(p) = e^{-bp} \mathcal{L}(f)(p).$$

Analyticité

Soit f une fonction dont la transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)$ admet pour abscisse de convergence a . Alors la fonction $\mathcal{L}(f)$ est analytique dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}_e(z) > a\}$ et ses dérivées successives sont données par les formules :

$$\frac{d^n \mathcal{L}(f)}{dp^n}(p) = \mathcal{L}(t \mapsto (-t)^n f(t))(p).$$

1.2.3 Transformée de Laplace des fonctions usuelles

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(p)$	$D_{\mathcal{L}(f)}$
1	$\frac{1}{p}$	$p > 0$
$t^n (n \in \mathbb{N})$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$p > 0$
$e^{at} (a \in \mathbb{C})$	$\frac{1}{p-a}$	$\mathcal{R}_e(p) > \mathcal{R}_e(a)$
$\sin bt (b \in \mathbb{R})$	$\frac{b}{p^2+b^2}$	$p > 0$
$\cos bt (b \in \mathbb{R})$	$\frac{p}{p^2+b^2}$	$p > 0$
$t^n e^{at} (n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{C})$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$\mathcal{R}_e(p) > \mathcal{R}_e(a)$
$\sinh at (a \in \mathbb{R})$	$\frac{a}{p^2-a^2}$	$p > a $
$\cosh at (a \in \mathbb{R})$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$p > a $
$e^{at} \cos bt (a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{R})$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$	$\mathcal{R}_e(p) > \mathcal{R}_e(a)$
$\sqrt{t}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p^3}}$	$p > 0$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{p}}$	$p > 0$

1.2.4 Transformée de Laplace inverse

Définition 1.7. Si $\mathcal{L}(f) = F$ représente la transformée de Laplace d'une fonction f , alors f représente la transformée de Laplace inverse de $\mathcal{L}(f)$ et nous notons $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F)(s)$.

Remarque 1.5. Contrairement aux transformées de Fourier, l'inversion des transformées de Laplace n'est pas chose aisée. En effet, la formule donnant $f(t)$, étant donné $\mathcal{F}(f)(s)$ n'est pas facilement dérivable de (1.1). La méthode générale pour obtenir la transformée de Laplace inverse fait usage de la théorie des variables complexes. Pour la détermination de l'original d'une transformée de Laplace, on peut utiliser le résultat suivant :

Théorème 1.5. Soit f dont la Transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)$ est connue. Alors f peut être déterminé par la formule :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \mathcal{L}(f)(p) e^{pt} dp,$$

où C est un contour fermé orienté dans le sens direct.

En particulier, si nous choisissons comme contour fermé C un contour qui entoure tous les pôles p_i de $\mathcal{L}(f)$, nous pouvons alors écrire

$$f(t) = \sum_{p_i} \text{Res}(\mathcal{L}(f)(p)e^{pt}, p_i).$$

Et pour un pôle de multiplicité n , le résidu se calcule par :

$$\text{Res}(\mathcal{L}(f)e^{pt}, p_i) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{p \rightarrow p_i} [(p - p_i)^n \mathcal{L}(f)(p)e^{pt}]^{(n-1)}.$$

Exemple 1.4. Déterminer l'original des transformées suivantes :

$$F_1(p) = \frac{1}{(p-a)(p-b)} \quad F_2(p) = \frac{1}{(p-a)^2} \quad \text{et} \quad F_3(p) = \frac{p^2+1}{(p-a)^3}$$

Remarque 1.6. Cependant, le tableau ci-dessus donnant la transformée de Laplace des fonctions usuelles permet de déterminer la transformée de Laplace inverse d'une fonction usuelle, en effectuant un certain nombre de décomposition.

Exemple 1.5. Déterminer l'original de :

1. $F_1(p) = \frac{1+3e^{-2p}}{p^2+2p+2}$
2. $F_2(p) = \frac{p^3+2p+1}{p^2(p^2+1)}$

Théorème 1.6. La transformation de Laplace inverse $\mathcal{L}^{-1}$ est une transformation linéaire.

1.2.5 Transformée de Laplace d'une dérivée

L'un des buts de ce chapitre est d'utiliser les transformées de Laplace pour résoudre les équations différentielles.

Soit f une fonction admettant une transformée de Laplace et telle que sa dérivée f' soit continue sur $[0, +\infty[$, alors pour tout $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t) dt \\ &= [e^{-pt} f(t)]_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \\ &= -f(0) + p\mathcal{L}\{f(t)\} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{L}\{f'(t)\} = pF(p) - f(0)$.

De même, $\mathcal{L}\{f''(t)\} = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$, $\mathcal{L}\{f'''(t)\} = p^3 F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0)$,

Théorème 1.7. si $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ sont continues sur $[0, +\infty[$ et sont d'ordre exponentiels et si $f^{(n)}$ est continues par morceaux sur $[0, +\infty[$, alors

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(t) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) = p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1} f^{(k)}(0),$$

où $F(p) = \mathcal{L}(f)(p)$.

1.2.6 Transformée de Laplace d'une primitive

Soit f une fonction causale et soit ϕ sa primitive qui s'annule en 0 c'est-à-dire $\phi(t) = \int_0^t f(s)ds$. Alors

$$\mathcal{L}(\phi)(p) = \frac{1}{p} \mathcal{L}(f)(p), \quad p \neq 0$$

1.2.7 Transformée de Laplace et produit de convolution

Théorème 1.8. Théorème de convolution

Soient f et g deux fonctions dont les transformées de Laplace $\mathcal{L}(f)$ et $\mathcal{L}(g)$ ont des abscisses de convergences respectifs a et b . Alors $f \star g$ admet une transformée de Laplace dont l'abscisse de convergence est inférieure ou égale à $\max\{a, b\}$ et on a la formule :

$$\mathcal{L}(f \star g)(p) = \mathcal{L}(f)(p) \cdot \mathcal{L}(g)(p) = F(p)G(p).$$

Remarque 1.7. Si f est une fonction causale, continue par morceaux et d'ordre exponentiel, alors

$$f \star g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

1.2.8 Relation entre la transformée de Laplace et transformée de Fourier

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. On définit les fonctions f^+ et f^- par :

$$\begin{cases} f^+(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ f^+(t) = f(t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f^-(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ f^-(t) = f(-t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 1.8. On considère la fonction $f : t \mapsto 1 - t^3$.

Représenter le graphe de f , f^+ et f^- .

Théorème 1.9. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Alors :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(f)(s) = \mathcal{L}(f^+)(2i\pi s) + \mathcal{L}(f^-)(-2i\pi s)$$

En d'autres termes, la transformée de Fourier de f en s est égale à la somme de la transformée de Laplace de f^+ en $2i\pi s$ et de la transformée de Laplace de f^- en $-2i\pi s$.

Exemple 1.6. En utilisant le théorème ci-dessus, déterminer la transformée de Fourier des fonctions f et g définies par :

$$f(t) = e^{-at} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g(t) = 1 - |t| & \text{si } |t| \leq 1 \\ g(t) = 0 & \text{si non} \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

1.3 APPLICATIONS DE LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE

1.3.1 Résolution des équations différentielles linéaires

On considère l'équation différentielle :

$$\begin{cases} a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(t) \\ y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1} \end{cases} \quad (1.2)$$

où les a_i et les y_i , $i = 0, \dots, n$ sont des constantes. Par la propriété de linéarité, la transformée de Laplace de cette combinaison linéaire est une combinaison linéaire de transformées de Laplace :

$$a_n \mathcal{L}(y^{(n)})(p) + a_{n-1} \mathcal{L}(y^{(n-1)})(p) + \dots + a_1 \mathcal{L}(y')(p) + a_0 \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(g)(p) \quad (1.3)$$

Le système (1.2) devient alors :

$$a_n [p^n Y(p) - p^{n-1} Y(0) - \dots - Y^{(n-1)}(0)] + a_{n-1} [p^{n-1} Y(p) - p^{n-2} Y(0) - \dots - Y^{(n-2)}(0)] + a_0 Y(p) = G(p) \quad (1.4)$$

où $\mathcal{L}(y)(p) = Y(p)$ et $\mathcal{L}(g)(p) = G(p)$.

L'équation linéaire devient alors une équation algébrique en $Y(p)$.

On résout alors l'équation (1.4) pour obtenir $Y(p)$ et on obtient la solution de l'équation différentielle (1.2) en prenant la transformée inverse $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y)(p)$.

Exemple 1.7. Résoudre l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 27te^{-t} \\ y(0) = -1, y'(0) = 1 \end{cases}$$

1.3.2 Résolution des systèmes différentiels linéaires

On considère l'équation différentiel :

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n + f_1(t) \\ y'_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n + f_2(t) \\ \vdots \\ y'_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n + f_n(t) \\ y_1(0) = y_0^1, y_2(0) = y_0^2, \dots, y_n(0) = y_0^n \end{cases} \quad (1.5)$$

où les a_{ij} et les y_0^i , $i = 0, \dots, n$ sont des constantes.

Par la propriété de linéarité, la transformée de Laplace de ce système différentiel linéaire conduit à un système algébrique linéaire de n équations à n inconnues $Y_i(p)$, $i = 0, \dots, n$ avec $Y_i(p) = \mathcal{L}(y_i)(p)$.

Après résolution de ce système algébrique, on prend la transformée de Laplace inverse pour avoir les fonctions y_i constituant la solution du système différentiel.

Exemple 1.8. Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} u'(t) = u(t) + 4v(t) \\ v'(t) = 2u(t) + 3v(t) \\ u(0) = 1, v(0) = 0 \end{cases}$$

1.3.3 Equations intégrales

Il est question ici de résoudre les équations dont l'inconnue figure sous le signe $\int$ par exemple l'équation intégrale de Volterra qui s'écrit :

$$f(t) = g(t) + \int_0^t f(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

où g et h sont connues.

Par application du théorème de convolution à cette équation intégrale, on obtient une équation algébrique d'inconnue $F(p)$ de la forme

$$F(p) = G(p) + F(p)H(p)$$

où F , G et H représentent les transformées de Laplace des fonctions f , g et h respectivement. La résolution de cette équation algébrique permet d'obtenir $F(p)$ et il ne restera plus qu'à prendre la transformée inverse de Laplace pour avoir la fonction f solution de l'équation intégrale.

Exemple 1.9. Résoudre l'équation intégrale $f(t) = \int_0^t f(\tau)e^{t-\tau}d\tau + te^t$

Solution 1.1. En appliquant la Transformée de Laplace, on obtient $F(p) = G(p) \times \frac{1}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2}$.

Ce qui donne après résolution $F(p) = \frac{1}{(p-1)(p-2)} = \frac{1}{p-2} - \frac{1}{p-1}$

En prenant la transformée inverse de Laplace, on obtient la solution :

$$f : t \longmapsto e^{2t} - e^t$$

GENERALITES SUR LES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

2.1 Introduction

De nombreuses phénomènes de la vie peuvent être décrits par une fonction. Par exemple le déplacement d'un mobile dans l'espace peut être défini par une fonction $u(x, y, z)$ où (x, y, z) correspondent aux différentes positions de l'espace occupée par le mobile traçant ainsi sa trajectoire. Si l'on suit l'évolution de ce mobile dans le temps, alors la fonction qui modélise ce déplacement sera une fonction du temps t et de la position (x, y, z) i.e $u(t, x, y, z)$. La dérivée (opération mathématiques) de la fonction u a une signification concrète : elle donne la vitesse du mobile et si l'on dérive le résultat obtenu pour la vitesse, on connaît alors l'accélération du mobile.

Les dérivées sont donc des outils mathématiques utiles dans la quantification de ce que nous observons tous les jours. Il peut être dans certains cas intéressant de s'attacher aux relations qui peuvent apparaître entre ces différentes dérivées (dérivées partielles) ; on obtient alors des équations aux dérivées partielles (E.D.P).

On distingue les E.D.P linéaires et celles non linéaires. Les premières décrivent de très nombreux problèmes issus des sciences physiques (physique quantique, électromagnétisme, conductivité thermique,...), de la mécanique (mécanique des fluides, mécanique des solides, élasticité,...), de la chimie, biologie (dynamique des populations) et même de la finance. Pour ce qui est des E.D.P non linéaires, elles peuvent modéliser de nombreux problèmes de la physique. En effet la plupart des phénomènes de la physique et des sciences de l'ingénieur sont non linéaires et une modélisation par des équations linéaires risque dans certains cas, d'effacer des événements que les équations linéaires ne peuvent pas prendre en compte.

Il est question pour nous, de présenter de manière sommaire la notion d'E.D.P, les différents types d'E.D.P et de décrire quelques méthodes de résolution.

2.2 Définitions et exemples

Définition 2.1. Une équation aux dérivées partielles (E.D.P) est une équation mathématique contenant en plus d'une variable dépendante u et des variables indépendantes $x_1, \dots, x_n$, une ou plusieurs dérivées partielles de u .

Sa forme générale est :

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \dots\right) = 0 \quad (2.1)$$

où F est une fonction numérique de plusieurs variables.

Définition 2.2. L'ordre d'une EDP est l'ordre de la dérivée partielle le plus élevé apparaissant dans l'équation.

Exemple 2.1.

1. $xy \frac{\partial u}{\partial x} - xe^y \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2 \ln x$ est une EDP d'ordre 1.
2. $(x+y) \frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} - y \frac{\partial^3 u}{\partial y (\partial^2 x)} = -4$ est une EDP d'ordre 3.

Définition 2.3. Une solution de l'EDP (2.1) est une fonction u de n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^n$ dont les dérivées partielles apparaissant dans l'équation existent dans le domaine D et qui est telle qu'après avoir substitué cette fonction et ses dérivées partielles dans l'équation (2.1), celle ci soit satisfaite.

Remarque 2.1. 1. En générale une EDP peut avoir une infinité de solutions et qui sont sous des formes très différentes comme nous ne voyons dans les exemples ci-dessus.

2. Il n'existe pas une méthode universelle pour résoudre toutes les EDP. Nous présenterons aux chapitres suivants, quelques méthodes de résolutions.

Exemple 2.2. considérons les EDP : $(E_1) : \frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0$ et $(E_2) : x^2 \frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} = y^2 \frac{\partial^2 u}{(\partial y)^2}$

1. Soit $f : (x, y) \mapsto (x - y)^3$.

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 3(x - y)^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -3(x - y)^2 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -6(x - y) \\ \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2} = 6(x - y) \end{array} \right.$$

On a : $\frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0$ donc f est une solution de (E_1) .

2. Soit $g : (x, y) \mapsto \sin(x - y)$. g est-elle solution de (E_1) ?
3. Vérifier que $h : (x, y) \mapsto \cos(xy)$ est une solution de (E_2) .

Exemple 2.3. 1. Considérons l'EDP

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 1 \quad (2.2)$$

En intégrant cette EDP par rapport à y , on a la solution :

$$u : (x, y) \mapsto y + C(x)$$

avec $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable de la variable x .

2. Considérons l'EDP

$$\frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} = x \quad (2.3)$$

En posant $v = \partial_x u$, on a $\partial_x v = x$ et en intégrant par rapport à x , on obtient :

$$v(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + C(y)$$

On a donc $\partial_x u = \frac{1}{2}x^2 + C(y)$ qui donne en intégrant une fois de plus par rapport à x :

$$u(x, y) = \frac{1}{6}x^3 + C(y)x + D(y)$$

On voit donc que toutes fonctions C et D de la variable y , dérivables définissent une solution de l'EDP (2.3).

3. Considérons l'EDP

$$\frac{\partial^2 u}{(\partial y)^2} - u = 0 \quad (2.4)$$

Fixons la variable x et posons $v(y) = u(x, y)$, alors v vérifie :

$$v'' - v = 0$$

ce qui donne $v(y) = Ae^{-y} + Be^y$, A et B étant des constantes (relativement à y).

Ainsi les solutions de l'EDP (2.4) est donnée par :

$$u(x, y) = A(x)e^{-y} + B(x)e^y.$$

A et B étant des fonctions dérivables de la variable x .

2.3 Notion de problème bien posé

On constate des exemples ci-dessus, que la solution générale des EDP dépend d'une fonction arbitraire pour le cas d'ordre 1 et de deux fonctions arbitraires pour le cas d'ordre 2, cela contrairement à une constante ou à deux constantes pour le cas des EDO. On retiendra tout simplement que l'ensemble des solutions d'une EDP peut être difficile à décrire. Ce pendant, lorsqu'une EDP modélise un phénomène du monde réel, les solutions intéressantes sont celles qui vérifient certaines conditions supplémentaires.

Par exemple, si on cherche à décrire les vibrations verticales d'une corde de longueur L , tendue entre deux points fixes A et B et si on note $u(t, x)$ la hauteur à l'instant t du point de la corde placé à la distance x de A , il est clair que les seules fonctions $u(t, x)$ intéressantes sont celles pour lesquelles :

$$\forall t, \quad u(t, A) = u(t, B) = 0.$$

Ce type de condition s'appelle condition au bord.

En générale, les conditions les plus souvent imposées à une solution u d'une EDP sur le domaine Ω sont :

- Les conditions initiales : c'est-à-dire que l'on connaît l'état du système que l'on veut décrire à l'aide d'une EDP à l'instant initial $t = t_0$.

$$u(t_0, x) = \varphi(x) \text{ pour EDP d'ordre 1}$$

$$\begin{cases} u(t_0, x) = \varphi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x) = \psi(x) \end{cases} \text{ pour les EDP d'ordre 2}$$

- Les conditions aux bords : c'est-à-dire que l'on connaît la valeur de u et/ou de $\partial_{\vec{n}} u$ sur le bord

$$\begin{cases} u \text{ est donnée sur le bord } \partial\Omega & \text{Condition de Dirichlet} \\ \partial_{\vec{n}} u \text{ est donnée sur le bord } \partial\Omega & \text{Condition de Newmann} \end{cases}$$

- Les conditions de régularité : Les solutions doivent être suffisamment différentiable, au moins pour que l'équation ait un sens.

$\partial\vec{n}$ étant la dérivée normale extérieure à la frontière $\partial\Omega$. Il est alors possible que le problème considéré "E.D.P + conditions physiques" admette une unique solution. Lorsque de plus la solution dépend continûment des données physiques dans le sens où une petite perturbation des données physiques n'entraîne qu'une légère perturbation de la solution, alors on parle de problème bien posé.

2.4 Classification des E.D.P

Notation 2.1. Dans la suite, nous noterons L un opérateur différentiel qui à toute fonction suffisamment différentiable u de n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ sur $D \subset \mathbb{R}^n$, associe une autre fonction Lu des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ sur le même domaine D .

Par exemple la relation $Lu = x^2 \frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{(\partial y)^2}$ définit l'opérateur $L = x^2 \frac{\partial^2}{(\partial x)^2} + y^2 \frac{\partial^2}{(\partial y)^2}$.

Avec cette notation, l'EDP (2.1) peut se mettre sous la forme

$$Lu = f \quad (2.5)$$

où f est une fonction donnée des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, L un opérateur et u une fonction inconnue à déterminer.

2.4.1 Equations aux dérivées partielles linéaires

Définition 2.4. 1. Une EDP de la forme (2.5) est dite linéaire lorsque l'opérateur L est linéaire. C'est-à-dire :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad L(\alpha u + \beta v) = \alpha Lu + \beta Lv$$

2. Si en plus f est identiquement nulle, alors on dit que l'EDP (2.5) est linéaire homogène.

Dans le cas contraire on dit qu'elle est linéaire non homogène.

3. L'E.D.P (2.5) est dite non linéaire si elle n'est pas linéaire, c'est-à-dire que l'opérateur L est elle associé est non linéaire.

Exemple 2.4. 1. L'équation

$$y \frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} + 2x \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - u = \cos xy$$

est une EDP linéaire non homogène.

En effet elle s'écrit sous la forme $Lu = \cos xy$ avec $Lu = y \frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} + 2x \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - u$.

On vérifie facilement que L est linéaire.

2. L'équation

$$\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} + 2u \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - u^2 = x$$

est une EDP non linéaire.

En effet elle s'écrit sous la forme $Lu = x$ avec $Lu = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} + 2u \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - u^2$.

On vérifie facilement que L n'est pas linéaire.

Remarque 2.2. 1. La forme générale d'une E.D.P linéaire d'ordre 1 en dimension n est :

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} + b(x_1, \dots, x_n)u = f(x_1, \dots, x_n) \quad (2.6)$$

où a_i , b et f sont des fonctions données.

Si les fonctions $a_1, \dots, a_n$ et b sont toutes constantes, alors on dit que l'E.D.P (2.6) est une E.D.P linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.

NB : Dans le cas où $n = 2$, (2.6) s'écrit :

$$a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = d(x, y).$$

2. La forme générale d'une E.D.P linéaire d'ordre 2 en dimension n est :

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{k=1}^n b_k(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_k} + c(x_1, \dots, x_n)u = f(x_1, \dots, x_n) \quad (2.7)$$

où $a_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, n$, $b_1, \dots, b_n$, c et f sont des fonctions données.

Si les fonctions $a_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, n$, $b_1, \dots, b_n$ et c sont toutes constantes, alors on dit que l'équation (2.7) est une E.D.P linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

NB : Dans le cas où $n = 2$, (2.7) s'écrit :

$$a_{11}(x, y) \frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} + a_{21}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + a_{12}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}(x, y) \frac{\partial^2 u}{(\partial y)^2} + b_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y)$$

Exemple 2.5. 1. $(E_1) : x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + xy u = e^{x+y}$ est une E.D.P linéaire d'ordre 1 à coefficients variables.

2. $(E_2) : 3 \frac{\partial u}{\partial x} - 4 \frac{\partial u}{\partial y} + 7 \frac{\partial u}{\partial z} + 5u = \ln xy$ est une E.D.P linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.

3. $(E_3) : x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - xy \frac{\partial^2 u}{(\partial y)^2} + ye^x \frac{\partial u}{\partial x} + 5u = z \ln xy$ est une E.D.P linéaire du second ordre.

2.4.2 E.D.P quasi-linéaires et semi-linéaire

Définition 2.5.

1. Une EDP est dite **quasi-linéaire** lorsqu'elle est linéaire par rapport à l'ensemble de ses dérivées d'ordre le plus élevé. En d'autres termes lorsque les fonctions coefficients des dérivées de degré le plus élevé ne dépendent que de la variable et des dérivées d'ordre strictement inférieur.

• La forme générale des EDP quasi-linéaire d'ordre 1 en dimension n est :

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} + b(x, u) = 0$$

- La forme générale des EDP quasi-linéaire d'ordre 2 en dimension n est :

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = 0$$

2. Une E.D.P est dite **sémi-linéaire** lorsqu'elle est quasi-linéaire et les fonctions coefficients des dérivées d'ordre le plus élevé ne dépendent que des variables et non de la fonction inconnue.

- La forme générale des E.D.P sémi-linéaires d'ordre 1 en dimension n est :

$$\sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + b(x, u) = 0.$$

- La forme générale des E.D.P sémi-linéaires d'ordre 2 en dimension 2 est :

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = 0.$$

Exemple 2.6.

- L'E.D.P

$$xu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = xy$$

est quasi-linéaire.

- L'E.D.P

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = xy$$

est sémi-linéaire.

Remarque 2.3. 1. Les E.D.P quasi-linéaires sont courantes en physique, d'où leur importance.

2. L'une des choses qu'il faut noter avoir à l'esprit à propos des E.D.P, c'est qu'il n'est en général pas question d'obtenir explicitement les solutions. Mais par contre la principale préoccupations est de dire s'il existe une ou plusieurs solutions et puis de déterminer certaines propriétés de ces solutions.

2.4.3 Principe de superposition

1. Si $u_1, \dots, u_p$ sont solutions de l'E.D.P linéaire $Lu = 0$, alors pour tous réels $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p$ est encore une solution de l'E.D.P $Lu = 0$.
2. Si u_1 est une solution de l'E.D.P $Lu = f_1$ et u_2 est une solution de l'E.D.P $Lu = f_2$, alors $u_1 + u_2$ est une solution de l'E.D.P $Lu = f_1 + f_2$.

3. La solution générale d'une E.D.P linéaire non homogène $Lu = f$, ($f \neq 0$) est la somme d'une solution particulière de cette E.D.P et de la solution générale de l'E.D.P linéaire homogène associée $Lu = 0$.

Corollaire 2.1. *L'ensemble solution d'une E.D.P linéaire est un espace vectoriel.*

2.4.4 Quelques E.D.P classiques

1. Equation de transport

Il s'agit en générale des E.D.P linéaire du premier ordre de la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + a(t, x) \cdot \nabla u(t, x) = f(x), & t \geq 0, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u(0, x) = g(x), & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Cette équation permet de décrire entre autre :

- le transfert d'énergie dans un milieu naturel sous différentes formes (forme thermique, rayonnement),
- la dynamique des particules en interaction avec la matière (neutron dans un matériau, photon dans l'atmosphère, électron dans un semi-conducteur).

2. Equation de la chaleur

Il s'agit de l'E.D.P qui décrit l'évolution de la température d'un corps en fonction du temps t et de la position x .

Considérons par exemple une barre de longueur L et on suppose qu'elle à la même température à tous les endroits. On la place entre deux corps dont l'un chaud noté A et l'autre froid noté B. La barre va s'échauffer et voir sa température u varier en fonction de sa position x et du temps t . Cette évolution est décrite par l'E.D.P du second ordre :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, \quad t \in [0, L], \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R},$$

appelée équation de la chaleur en dimension 1+1, où $k = \frac{\lambda}{C\rho}$, avec : λ la conductivité thermique, C le coefficient de chaleur massique et ρ la masse volumique de la barre. Cette équation est résolue avec les conditions :

- i) Condition initiale : $u(0, x) = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R},$
- i) Condition aux bords : $u(t, 0) = u(t, L) = 0, \quad t \in [0, L]$

En dimension $1 + n$, l'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - k \Delta u(t, x) = 0, \quad t \geq [0, L], \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

3. Equation des ondes

Il s'agit d'une E.D.P qui permet de décrire les perturbations où les vibrations qui se propagent dans un milieu.

Considérons une corde tendue AB de longueur L qui forme à l'équilibre un segment de droite. On choisit un système de coordonnées où la corde au repos coïncide avec le segment $[0, L]$ de l'axe $(0X)$. Un point matériel M situé en x lorsque la corde est au repos, se déplace en M' à l'instant t . L'onde est décrit par la fonction $u(t, x)$ qui donne le déplacement $\overrightarrow{MM'}$ de chaque point à chaque instant. La fonction u vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, \quad t \in [0, L], \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R},$$

appelée équation de la corde vibrante ou des ondes en dimension 1+1 où C désigne la vitesse de propagation ou célérité des ondes. Cette équation est résolue avec les conditions :

- i) Condition initiale : $u(0, x) = f(x)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}$,
- i) Condition aux bords : $u(t, 0) = u(t, L) = 0$, $t \in [0, L]$.

En dimension $1 + n$, l'équation des ondes s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - C^2 \Delta u(t, x) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

avec les conditions initiales : $u(0, x) = f(x)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, et les conditions aux bords :

$$\begin{cases} u(t, x) = 0, & t \geq 0, \quad x \in \partial\Omega \quad (\text{Condition de Dirichlet}) \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(t, x) = 0, & t \geq 0, \quad x \in \partial\Omega \quad (\text{Condition de Neumann}) \end{cases}$$

$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ désigne la dérivée directionnelle de u dans la direction du champ de vecteur normal unitaire extérieur $\vec{n}$ le long du bord $\partial\Omega$.

4. Equation de Laplace

Il s'agit de l'E.D.P linéaire du second ordre de la forme :

$$\Delta u(x) = 0$$

5. Equation de Poisson

Il s'agit de l'E.D.P linéaire du second ordre de la forme :

$$-\Delta u(x) = f(x)$$

ETUDE DES E.D.P DU PREMIER ORDRE

Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction numérique définie sur Ω . Il est question pour nous dans ce chapitre d'étudier les E.D.P de la forme :

$$F(x, u(x), \nabla u(x)) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (3.1)$$

Cette équation est souvent soumise à la condition

$$u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (3.2)$$

appelée condition au bord.

Nous recherchons une fonction $u \in C^1(\Omega)$ solution de (3.1) – (3.2).

3.1 Méthode des caractéristiques

Nous allons ici décrire une méthode de résolution des E.D.P linéaires d'ordre 1 appelée méthode des caractéristiques. Nous rappelons que la forme générale des E.D.P d'ordre 1 est :

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} + b(x_1, \dots, x_n)u = f(x_1, \dots, x_n), \quad (3.3)$$

où $a_1, \dots, a_n$ et f sont des fonctions définies sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et u la fonction inconnue.

Définition 3.1. *On appelle courbe paramétrée de $\mathbb{R}^n$, toute application*

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ s &\longmapsto (x_1(s), \dots, x_n(s)) \end{aligned}$$

On note $\gamma'(s) = \left(\frac{dx_1(s)}{ds}, \dots, \frac{dx_n(s)}{ds} \right)$ la tangente à la courbe dont-on suppose qu'elle est partout non nulle.

Exemple 3.1.

$$\begin{aligned} \gamma_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \text{et} & \gamma_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ s &\longmapsto (2 - 3s, -3 + s) & & s \longmapsto (e^s, 1 + s, e^{2s}) \end{aligned}$$

sont des courbes paramétrées de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.

Définition 3.2. On dit que la courbe paramétrée γ est une courbe caractéristique de l'E.D.P

(3.3) si $\gamma'(s)$ est partout parallèle au champ de vecteurs $A(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$ que nous supposons non nul. C'est-à-dire $\exists \lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \lambda(s) \neq 0$ tel que $\gamma'(s) = \lambda(s)A(x(s))$.

Dans la pratique, on choisit de prendre $\lambda = 1$. Ainsi les courbes caractéristiques sont des courbes paramétrées $\gamma(s)$ vérifiant $\gamma'(s) = A(x(s))$ i.e

$$\frac{dx_1}{ds}(s) = a_1(x(s)), \dots, \frac{dx_n}{ds}(s) = a_n(x(s)) \quad (3.4)$$

Remarque 3.1. Si nous fixons $x_1(0) = x_1^0, \dots, x_n(0) = x_n^0$, alors il y a une seule solution à ce système d'équations différentielles ordinaires, à cause de l'hypothèse que $A(x) \neq (0, \dots, 0)$, pour tout point $x \in \Omega$. Noter qu'il est en général difficile de résoudre explicitement un tel système.

Considérons une courbe paramétrée $\gamma(s)$ vérifiant $\gamma'(s) = A(x(s))$ et posons $z(s) = u(x(s))$. D'après la règle de dérivation en chaîne, la solution u vérifie le long de cette courbe l'E.D.O :

$$z'(s) = -b(x(s))z(s) + f(x(s)).$$

Remarque 3.2. - Si $b = f = 0$, alors $z'(s) = 0$. Dans ce cas, la solution u est constante le long de chaque courbe caractéristique.

- Dans le cas générale où $b \neq 0$ ou $f \neq 0$, on a $z'(s) = -b(x(s))z(s) + f(x(s))$, qui est une E.D.O linéaire d'ordre 1 que l'on peut résoudre par la méthode de la variation de la constante.

En conclusion, si la valeur de u est connue en un point $x(s_0)$ de la courbe caractéristique, alors on peut calculer sa valeur partout. Résoudre ce genre de problème consiste donc principalement à déterminer les courbes caractéristiques.

Exemple 3.2. Déterminer et représenter quelques courbes intégrales de l'EDP

$$(E) : x \frac{\partial u}{\partial x} - 2y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

puis déterminer la solution vérifiant $u(1, y) = \varphi(y)$, $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

Cadre générale

De manière générale, considérons $x : s \mapsto x(s)$ une courbe paramétrée de classe C^1 sur $I \subset \mathbb{R}$. Posons :

$$z(s) = u(x(s)), \quad p_i(s) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x(s)), \quad p(s) = \nabla u(x(s)),$$

alors l'EDP (3.3) devient

$$F(x, u, p) = 0 \quad \text{avec} \quad F(x, u, p) = \sum_{i=1}^n a_i p_i - f(x, u)$$

Si u est C^2 sur I , alors p et z sont C^1 sur I et de plus les fonctions x , p et z vérifient le système différentiel appelé système différentiel caractéristique

$$(S_c) : \begin{cases} x'_j(s) = \frac{\partial F}{\partial p_j}(x(s), z(s), p(s)), \quad \forall j = 1, \dots, n \\ p'_j(s) = -\frac{\partial F}{\partial x_j}(x(s), z(s), p(s)) - \frac{\partial F}{\partial u} \cdot p_j(s) \\ z'(s) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_i}(x(s), z(s), p(s)) \cdot p_j(s) \end{cases}$$

La résolution de (S_c) nous donne une courbe x , la fonction z (i.e la fonction u sur cette courbe) et la fonction p (gradient de u sur cete courbe).

Ensuite, étant donné la courbe caractéristique initiale $\tilde{\Sigma}$, on choisit le paramètre s pour chaque caractéristique de manière que pour $s = 0$, on obtient les points de la caractéristique $\tilde{\Sigma}$. Ce qui permet de déterminer la solution u .

Théorème 3.1. *La solution de l'E.D.P homogène $\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ sans condition aux bords est de la forme*

$$u(x_1, \dots, x_n) = H(\varphi(x_1, \dots, x_n)),$$

où H est une fonction numérique quelconque dérivable d'une variable réelle et l'équation de cartésienne des courbes caractéristiques étant $\varphi(x_1, \dots, x_n) = cte$.

3.2 Utilisation d'un changement de variables

3.2.1 Changement de variables affines

Exemple 3.3. *En utilisant le changement de variable $\theta = ax + by$, $\varepsilon = bx - ay$, résoudre l'E.D.P*

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0.$$

Exemple 3.4. Déterminer une solution de l'E.D.P

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1$$

sous la forme $u(x, y, z) = \varphi(x) + \psi(y)$.

3.2.2 Changement en coordonnées polaires

Exemple 3.5. En utilisant les coordonnées polaires, déterminer la solution générale de l'E.D.P

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + xy = 0.$$

3.2.3 TD sur les E.D.P d'ordre 1

Exercice 3.1. Résoudre par la méthode des caractéristiques les E.D.0

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y) + a \frac{\partial u}{\partial x}(t, x, y) + b \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, y) = 0 \\ u(t, 0, y) = \varphi(t, y) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y \frac{\partial u}{\partial x} = x \frac{\partial u}{\partial y} \\ u(3x, x) = e^{x^2}, x > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = -2u \\ u(x, 1) = g(x) \end{cases}$$

Exercice 3.2. 1. On considère l'EDP (E) : $x \frac{\partial \omega}{\partial x} + y \frac{\partial \omega}{\partial y} = a \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \\ (r, \theta) &\longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned}$$

est une bijection et calculer la matrice jacobienne de φ .

b) On pose $u = \omega \circ \varphi$. Calculer $\frac{\partial u}{\partial r}$ et $\frac{\partial u}{\partial \theta}$ en fonction de celle de ω et en déduire l'EDP vérifiée par u .

c) Résoudre l'EDP vérifiée par u et en déduire les solutions de (E).

2. Déterminer les solutions de l'EDP $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \frac{a}{\sqrt{x^2 + y^2}} + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. (Indication : passer en coordonnées polaires)

Exercice 3.3. 1. Déterminer la fonction $u(x, t)$ vérifiant

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \text{ avec } u(x, 0) = f(x) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

c est un nombre réel positif donné, f et g des fonctions données.

Indication : vérifier que l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ s'écrit encore $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} = v \\ \frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$

2. Expliciter la solution dans chacun des cas suivants :

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \begin{cases} \sin x & \text{si } -\pi \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad \text{et } g(x) = 0 \text{ pour tout } x. \\ \text{b) } f(x) &= x^2 \text{ et } g(x) = \cos^2 x. \end{aligned}$$

ETUDE DES E.D.P LINEAIRES DU SECOND ORDRE

On rappelle que les E.D.P linéaires du second ordre en dimension n , sont les E.D.P de la forme :

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^n B_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + C(x)u = F(x),$$

avec A_{ij} , B_k , C et F sont des fonctions définies sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Nous supposons que les solutions recherchées u sont toutes de classe C^2 sur Ω . Par conséquent

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}, \quad \forall i, j, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Un bon nombre des équations modélisant les problèmes physique sont des E.D.P linéaires homogènes d'ordre 2. Dans la suite nous allons nous restreindre aux E.D.P en dimension 2.

4.1 E.D.P hyperboliques, paraboliques, élliptiques : cas $n = 2$

Considérons l'E.D.P linéaires d'ordre 2 en dimension 2 :

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{(\partial y)^2} + D(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + E(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + F(x, y)u = R(x, y), \quad (4.1)$$

où A , B , C , D , E , F et R sont des fonctions définies sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ et u la fonction inconnue.

La quantité

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{(\partial y)^2},$$

est appelée **partie principale de l'E.D.P (4.1)**. A cette partie principale, on associe la forme quadratique

$$Q : (X, Y) \mapsto A(a, b)X^2 + B(a, b)XY + C(a, b)Y^2$$

au point $(a, b) \in \Omega$.

Définition 4.1. Soit $(x_0, y_0) \in U$. L'EDP (4.1) est dite :

1. Hyperbolique au point (x_0, y_0) si la forme quadratique Q en (x_0, y_0) a pour signature $(1, 1)$, c'est-à-dire qu'en ce point cette forme quadratique se décompose en un carré positif et un carré négatif.
2. Elliptique au point (x_0, y_0) si la forme quadratique Q en (x_0, y_0) est définie positive ou négative, c'est-à-dire qu'en ce point cette forme quadratique se décompose en deux carrés positifs ou deux carrés négatifs.
3. Parabolique au point (x_0, y_0) si la forme quadratique Q en (x_0, y_0) est non dégénérée.

Définition 4.2.

L'EDP (4.1) est dite hyperbolique (resp elliptique, resp parabolique) sur l'ouvert Ω , lorsqu'elle est hyperbolique (resp elliptique, resp parabolique) en tout point de Ω .

Théorème 4.1. Posons $\Delta(x, y) = B^2(x, y) - 4A(x, y)C(x, y)$. L'E.D.P (4.1) est :

1. Hyperbolique au point (x_0, y_0) si et seulement si $\Delta(x_0, y_0) > 0$.
2. Elliptique au point (x_0, y_0) si et seulement si $\Delta(x_0, y_0) < 0$.
3. Parabolique au point (x_0, y_0) si et seulement si $\Delta(x_0, y_0) = 0$.

Exemple 4.1.

1. L'équation des ondes en dimension $1 + 1$: $\frac{\partial^2 u}{(\partial y)^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} = 0$ est une EDP hyperbolique.
2. L'équation de Laplace en dimension $1 + 1$: $\frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 u}{(\partial y)^2} = 0$ est une EDP elliptique
3. L'équation de la chaleur en dimension $1 + 1$: $\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{(\partial y)^2}$ est une EDP parabolique

Exercice 4.1. On considère l'EDP

$$(E) : x \frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} + 2y \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + x \frac{\partial^2 u}{(\partial y)^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Déterminer et représenter dans le plan, l'ensemble des points $M(x, y)$ pour lesquels l'EDP (E) est parabolique, elliptique ou hyperbolique.

4.2 Réduction d'une E.D.P d'ordre 2 en dimension 2 à sa forme canonique

Définition 4.3. Une courbe caractéristique de l'E.D.P (4.1) est une courbe dans du plan satisfaisant l'équation différentielle

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - B \left(\frac{dy}{dx} \right) + C = 0. \quad (4.2)$$

Remarque 4.1.

1. Si l'E.D.P (4.1) est hyperbolique dans le domaine Ω , alors en tout point de Ω passe deux courbes caractéristiques réels.
2. Si l'E.D.P (4.1) est elliptique dans le domaine Ω , alors en tout point de Ω passe deux courbes caractéristiques complexes.
3. Si l'E.D.P (4.1) est paraboliques dans le domaine Ω , alors les courbes caractéristiques sont confondues.

Définition 4.4.

1. Si l'E.D.P (4.1) est hyperbolique dans le domaine Ω , alors sa forme canonique est

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = F \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

2. Si l'E.D.P (4.1) est parabolique dans le domaine Ω , alors sa forme canonique est

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

3. Si l'E.D.P (4.1) est elliptique dans le domaine Ω , alors sa forme canonique est

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Proposition 4.1. (Principe de réduction de l'E.D.P (4.1) à sa forme canonique)

1. Ecrire l'équation caractéristique de (4.1) et calculer son discriminant $\Delta = B^2 - 4AC$. Trois cas s'imposent :
2. i) Si $\Delta > 0$, alors l'équation (4.2) admet deux intégrales qui sont des familles de courbes caractéristiques réelles

$$\varphi(x, y) = C_1 \quad \text{et} \quad \psi(x, y) = C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

On pose alors $\xi = \varphi(x, y)$ et $\eta = \psi(x, y)$ et on réduit (4.1) à sa forme canonique.

ii) Si $\Delta < 0$, alors l'équation (4.2) admet deux intégrales qui sont des familles de courbes caractéristiques complexes

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = C_1 \text{ et } \varphi(x, y) - i\psi(x, y) = C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

avec φ et ψ des fonctions réelles.

On pose alors $\xi = \varphi(x, y)$ et $\eta = \psi(x, y)$ et on réduit (4.1) à sa forme canonique.

iii) Si $\Delta = 0$, alors l'équation (4.2) admet une intégrale réelle

$$\varphi(x, y) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

On pose alors $\xi = \varphi(x, y)$ et $\eta = \psi(x, y)$ où ψ vérifie $\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \neq 0$. Puis on réduit (4.1) à sa forme canonique.

Exemple 4.2. Donner la forme canonique de l'équation des ondes et de la chaleur en dimension $1 + 1$.

4.3 Méthode de séparation des variables

Il est question ici de déterminer les solutions de l'E.D.P 4.1 sous la forme $u(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ et d'en déduire une solution sous forme d'une série.

4.3.1 Cas de l'équation de la chaleur en dimension $1 + 1$

On considère l'équation de la chaleur en dimension $1+1$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u = u(t, x) \quad (4.3)$$

avec les conditions
$$\begin{cases} u(t, 0) = u(t, l) = 0, \quad \forall t \geq 0 & \text{(conditions au bord)} \\ u(0, x) = f(x), \quad \forall x \in [0, l] & \text{(conditions initiales)} \end{cases}.$$

Déterminer la solution sous la forme d'une série de cette E.D.P par le principe de séparation des variables.

4.3.2 Cas de l'équation des ondes en dimension $1 + 1$

On considère l'équation des ondes en dimension $1+1$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u = u(t, x) \quad (4.4)$$

avec les conditions
$$\begin{cases} u(t, 0) = u(t, l) = 0, \quad \forall t \geq 0 & \text{(conditions au bord)} \\ u(0, x) = f(x) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x), \quad \forall x \in [0; l] & \text{(conditions initiales)} \end{cases}.$$

Déterminer la solution sous la forme d'une série de cette E.D.P par le principe de séparation des variables.

4.4 TD sur les E.D.P d'ordre 2

Exercice 4.2. 1. Soit l'EDP de Laplace $\Delta u = 0$ sur $\mathbb{R}^2$.

Montrer que les fonctions complexes $(x, y) \mapsto (x + iy)^n$ et $(x, y) \mapsto (x - iy)^n$, $n \in \mathbb{N}$ sont des solutions de l'équation de Laplace. En déduire deux familles de solutions réelles de l'équation de Laplace.

2. Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 est dite harmonique si son laplacien est nul, ie si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

et est radiale s'il existe $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$.

a) On suppose que f est harmonique et radiale. Montrer que φ est solution d'une E.D.P linéaire du second ordre que l'on précisera.

b) En déduire toutes les fonctions harmoniques radiales.

Exercice 4.3. 1. Déterminer pour quels couples $(x; y)$ du plan, chacune des EDP linéaires d'ordre 2 suivantes est (a) elliptique, (b) parabolique et (c) hyperbolique.

- i) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3 \frac{\partial u}{\partial x} = 0;$
- ii) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (x - 3) \frac{\partial u}{\partial y} = u;$
- iii) $e^x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 5y \frac{\partial u}{\partial x} = e^x ;$
- iv) $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(x - y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 ;$
- v) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (x + y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial u}{\partial x} = \sin x.$

2. Réduire à sa forme canonique les E.D.Ps suivantes :

- i) $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$
- ii) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$
- iii) $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$
- iv) $\frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

3. Soit l'EDP linéaire d'ordre 2 suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

- Déterminer si l'équation est elliptique, parabolique ou elliptique.
- Déterminer les équations caractéristiques de cette équation.
- Transformer cette équation dans sa forme canonique.

Exercice 4.4. 1. Résoudre l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

dans le cas d'une barre infinie et isolée latéralement avec la condition initiale

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

en utilisant la transformation de Fourier par rapport à x .

Application : $f(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right).$

2. On veut résoudre l'équation d'Helmholtz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u$$

où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in [0, 1]$ avec les conditions

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad u(x, 1) = e^{-ax^2}, \quad a > 0$$

- Utilisant la transformée de Fourier U de u par rapport à x , écrire l'équation différentielle à laquelle doit obéir U .
- Résoudre cette équation différentielle, compte tenu des conditions aux limites.
- En déduire la solution $u(x; y)$ de l'équation d'Helmholtz.

Exercice 4.5. On veut résoudre, par la méthode de Fourier, l'équation des ondes dans un tube de longueur L suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \beta u(x, t) = 0, & 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & 0 \leq x \leq L \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 & 0 < x < L \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & t \geq 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

où c et β sont des constantes positives et f une fonction donnée sur $[0, L]$.

1. De quel type d'E.D.P s'agit-il ?
2. On commence par chercher les solutions particulières non identiquement nulles de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \beta u(x, t) = 0 \quad (4.6)$$

sous la forme $w(x, t) = \varphi(x)\psi(t)$.

- a) Démontrer que l'on peut trouver φ comme solution de l'équation

$$\varphi''(x) = \lambda \varphi(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

et ψ comme solution d'une équation différentielle d'ordre 2 que l'on précisera.

- b) En déduire les expressions de φ et de ψ .

3. En utilisant les conditions aux limites

$$w(0, t) = w(L, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = 0. \quad (4.7)$$

montrer l'existence d'une famille de solution $(w_k)_{k \geq 1}$ de (4.6)-(4.7).

4. Soit f la fonction définie, pour, $x \in [0, 1]$, par $f(x) = x - x^2$. Tracer la courbe de f et trouver une suite $(b_n)_{n \geq 1}$ telle que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\pi x), \quad \text{pour } 0 \leq x \leq 1.$$

5. En utilisant tout ce qui précède, déterminer la solution u de (4.5), avec $L = c = \beta = 1$ et $u_0(x) = f(x)$ sous la forme d'une série.

Exercice 4.6. On se propose de trouver les solutions de l'E.D.P

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -4y \\ y(t, 0) = 0, \quad y(t, \pi) = 0, \quad y(0, x) = 2 \sin x + 3 \sin 2x \end{cases}$$

On pose

$$Y(s, x) = \int_0^{+\infty} y(t, x) e^{-st} dt = \mathcal{L}_t(u)(s, x),$$

la transformée de Laplace de u par rapport à la variable t .

1. Montrer que

$$\frac{d^2 Y}{dx^2}(s, x) - (s + 4)Y(s, x) = 2 \sin x + 3 \sin 2x. \quad (4.8)$$

2. On note $Y_0(s, x)$ les solutions de l'équation homogène associée à (4.8). Déterminer la forme générale des $Y_0(s, x)$.
3. Trouver les solutions particulières de (4.8) sous la forme $Y_p(s, x) = A \sin x + B \sin 2x$.
4. Déduire les solutions du problème.